மாகாணக் கல்வித் திணைக்களம் - வடமாகாணம்

இணைந்த கணிதம் I

தரம் 13 (2020)

பயிற்சிப் பரீட்சை - 01

---

(01) $\sum_{r=1}^{n} r.2^{r-1} = 1+(n-1)2^n \quad n\in Z^+$

$n=1$ இல் நிறுவல்

$L.H.S = 1.2^{1-1} = 1$

$R.H.S = 1+(1-1)2^1 = 1 = L.H.S$

(5)

$\therefore n=1$ இற்கு முறை உண்மை அதும்

$n=k$ இற்கு முறை உண்மை எனின் $(k\in Z^+)$

$\sum_{r=1}^{k} r.2^{r-1} = 1+(k-1)2^k$ (5)

$n=k+1$ இல் நிறுவல்.

$L.H.S = \sum_{r=1}^{k+1} r.2^{r-1}$

$= \sum_{r=1}^{k} r.2^{r-1} + (k+1)2^{k+1-1}$ (5)

$= 1+(k-1)2^k + (k+1)2^k$

$= 1+2k.2^k$

$= 1+(\overline{k+1}-1)2^{k+1} = R.H.S$ (5)

$n=k+1$ இற்கு முறை உண்மை அதும்

கணிதத் தொகுத்தறிதல் கொள்கையினால் எல்லா இயற்கை எண்ணிற்கும் இம்முறை உண்மை (5) 25

---

(02) $y=2|x+1|-3$

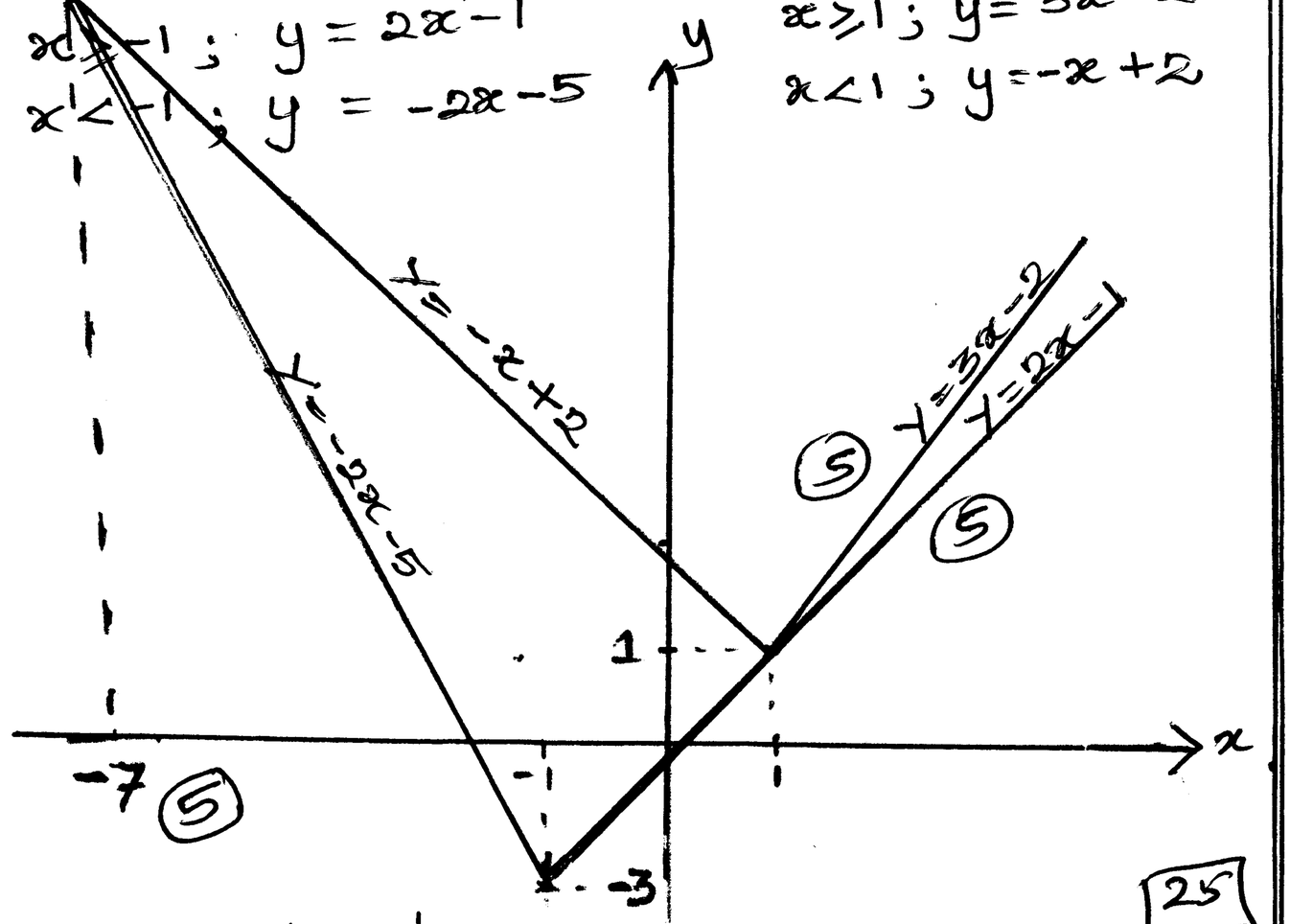
$x\geq -1$; $y=2x-1$

$x<-1$; $y=-2x-5$

$y=x+2|x-1|$

$x\geq 1$; $y=3x-2$

$x<1$; $y=-x+2$



(5) (5) (5) (5) 25

$x+3+2|x-1| > 2|x+1|$ (5)

$x+2|x-1| > 2|x+1|-3$ (5)

$-7<x<1$ or $x>1$, $(-7,1)\cup(1,\infty)$

---

(03) $z_1=3+4i$, $|z_2|=5$

$z_1+z_2=z$; $z=x+iy$ எனக்கொள்க.

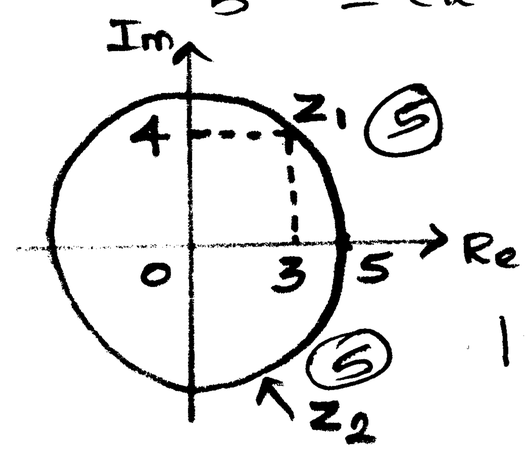
$z_2 = x+iy-3-4i$

$= (x-3)+i(y-4)$ (5)

அதனால் $|z_2|=5$

$|z_2| = \sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}$

$5^2 = (x-3)^2+(y-4)^2$ (5)



(5) (5)

$|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$

$= 5+5$

$= 10$

$|z_1+z_2| = |z|_{\text{உயர்வு}} = 10.$

(5) 25

---

(04) T_{r-1} , T_r , T_{r+1} அதியன அருந்தவரும் உறுப்புக்கள் எனின்

$T_{r-1} = {}^{(n+5)}C_{(r-2)} \cdot x^{(r-2)}$

$T_r = {}^{(n+5)}C_{(r-1)} \cdot x^{(r-1)}$ (5)

$T_{r+1} = {}^{(n+5)}C_r \, x^r$

${}^{n+5}C_{r-2} : {}^{n+5}C_{r-1} : {}^{n+5}C_r = 5:10:14$ (5)

$\frac{{}^{n+5}C_{r-2}}{5} = \frac{{}^{n+5}C_{r-1}}{10} = \frac{{}^{n+5}C_r}{14}$

$n-3r=-9$ (5)

$5n-12r=-30$ (5)

$n=6.$ (5) 25

⑤ $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos 2x)(1-\cos 4x)\ldots\ldots(1-\cos 2nx)}{x^{2n}}$

$= \lim_{x\to 0}\left[\left(\dfrac{2\sin^2 x}{x^2}\right)\left(\dfrac{2\sin^2 2x}{(2x)^2}\right)\times 4 \ldots\ldots \left(\dfrac{\sin^2 nx}{(nx)^2}\right)n^2\right]$ (10)

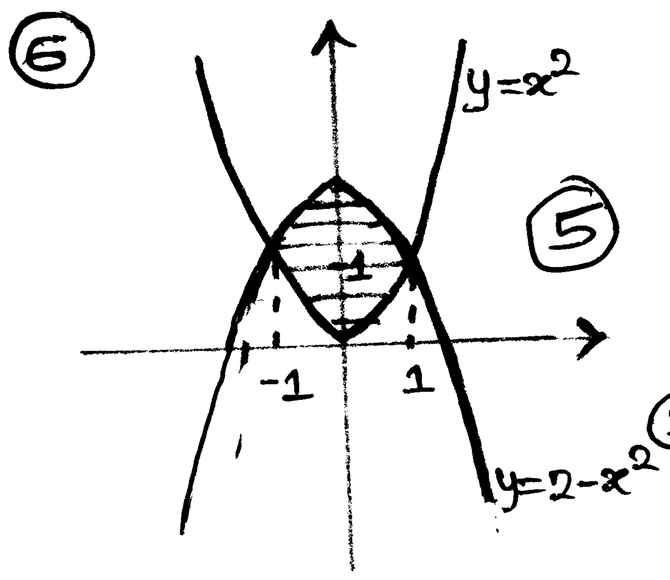
$= 2^n\left(1^2\times 2^2\times \ldots\ldots\ldots n^2\right)$ (10)

$= 2^n(n!)^2$ (5)

$\boxed{25}$

---

⑥



(5)

$2-x^2=x^2$

$x^2=1$

$x=\pm 1,\ y=1$

இடைப்பட்ட பரப்பின் பரப்பளவு

(5) $\int_{-1}^{1}[(2-x^2)-x^2]\,dx$

$=\int_{-1}^{1}(2-2x^2)\,dx$

$=4-4/3 = 8/3$ சதுர அலகுகள் (5)

கனவளவு

$=\pi\int_{-1}^{1}[(2-x^2)^2-(x^2)^2]\,dx$ (5)

$=\pi\times 16/3 = 16\pi/3$ கனஅலகுகள் (5)

$\boxed{25}$

---

⑦ $x=\dfrac{3at}{1+t^2},\quad y=\dfrac{3at^2}{1+t^2} \Rightarrow y/x = t$

$t=27/9=3$

$a=10$

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{(1+t^2)\cdot 3a-3at\cdot 2t}{(1+t^2)^2}$ (5)

$=\dfrac{3a(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{(1+t^2)\cdot 6at-3at^2\cdot 2t}{(1+t^2)^2}$ (5)

$=\dfrac{6at}{(1+t^2)^2}$

$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(9,27)}=\left\{\dfrac{6at}{3a(1-t^2)}\right\}_{t=3}=\dfrac{2\times 3}{(1-9)}=\dfrac{6}{-8}=\dfrac{-3}{4}$ (5) (5)

(9,27) இலான தொடலியின் சமன்பாடு

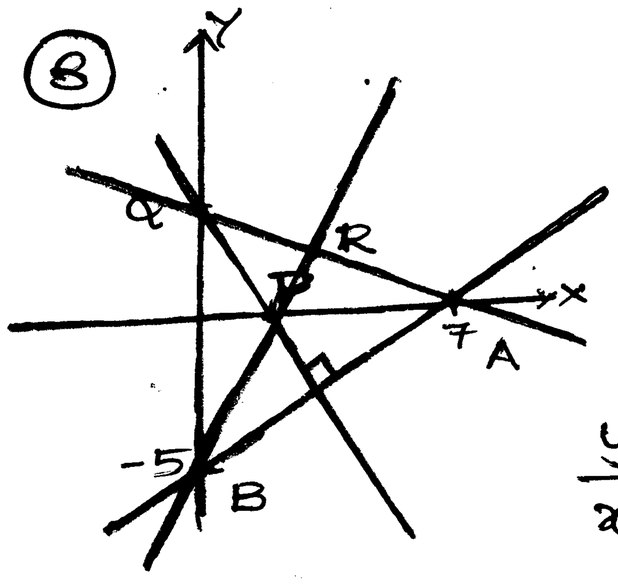
$y-27=-3/4(x-9)$ (5)

$3x+4y-135=0$

$\boxed{25}$

---

⑧



AQ ⊥ BR ஆகும்.

(5) $R\equiv(x_0,y_0)$ எனின்

$\dfrac{y_0-0}{x_0-7}\times\dfrac{y_0+5}{x_0-0}=-1$ (10)

(7,-5) ஊடாக

$y_0(y_0+5)+x_0(x_0-7)=0$ (5)

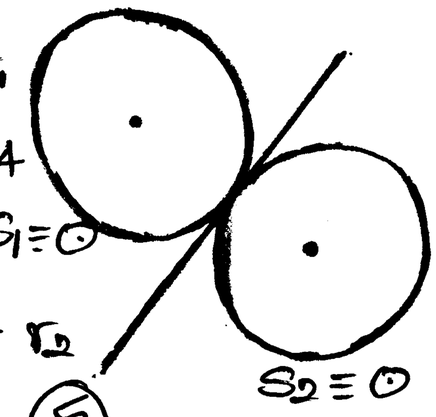
$x_0^2+y_0^2-7x_0+5y_0=0$ (5)

R இன் ஆக்கிய $x^2+y^2-7x+5y=0$ (5)

எனும் வட்டமாகும். $\boxed{25}$

---

⑨



S_1 இன் மையம் A, அரை r_1

$A\equiv(-3,-2),\ r_1=\sqrt{9+4-4}$ (5)

$=3 \quad S_1\equiv 0$

S_2 இன் மையம் B, அரை r_2

$B\equiv(0,2),\ r_2=2$ (5)

$AB=\sqrt{(0+3)^2+(2+2)^2}$ (5)

$=5$

$AB=r_1+r_2$ ஆக அமைவதால் வெளிப்புற தொடலி ஆகும். (5)

∴ பொதுத் தொடலியின் சமன்பாடு $S_1-S_2=0$

$6x+8y+4=0$

$3x+4y+2=0$ (5) $\boxed{25}$

---

⑩ $\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C$

$=\frac{1}{2}(1-\cos 2A)+\frac{1}{2}(1-\cos 2B)-(1-\cos^2C)$ (5)

$=\cos^2C-\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)$

$=\cos^2C-\frac{1}{2}\times 2\cos(A+B)\cdot\cos(A-B)$ (5)

$=\cos^2C-\cos(\pi-C)\cdot\cos(A-B)$

$=\cos^2C+\cos C\cdot\cos(A-B)$ (5)

$=\cos C\left[\cos(A-B)-\cos(A+B)\right]$ (5)

$=\cos C\cdot 2\cdot\sin A\cdot\sin B$ (5)

$=2\sin A\cdot\sin B\cdot\cos C$

$\boxed{25}$

(11)

(a) $\alpha+\beta=-p$ (5) $\quad a+b=\alpha+\beta^2+\beta+\alpha^2$

$\alpha\cdot\beta=q$ (5) $\quad =(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$ (5)

$=(p^2-2q-p)$ (5)

$a\cdot b=(\alpha+\beta^2)(\beta+\alpha^2)$

$=\alpha\beta+\alpha^3+\beta^3+\alpha^2\beta^2$ (5)

$=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha\beta+(\alpha\beta)^2$ (5)

$=-p^3+3pq+q+q^2$ (5)

a, b மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு (10)

$x^2-(p^2-2q-p)x+(-p^3+3pq+q+q^2)=0$ $\boxed{45}$

இங்கு $\Delta=[-(p^2-2q-p)]^2-4\times1\times(-p^3+3pq+q+q^2)$ (5)

$=p^4+2p^3-4p^2q-8pq+p^2-4q$ (5)

$=p^2(p^2+2p+1)-4q(p^2+2p+1)$ (5)

$=(p+1)^2(p^2-4q)$ (10)

a, b மெய்யில்லாமல் இருக்கும்போது

$(p^2-4q)<0$ (5)

எனவே $p+1=0$ அக இருந்தால் – இருந்தால் மாத்திரம் $\Delta=0$ ஆகும். (10)

அதாவது $p=-1$ அக இருந்தால் – இருந்தால் மாத்திரம் a, b ஆகியன மெய்யாகும் (5)

எனவே $\Delta=0$ ஆகையால் மூலங்கள் பொருந்த வேண்டும் ; $a=b$ ஆகும். (5)

$p=(-1) \Rightarrow a+b=p^2-2q-p$ $\boxed{55}$

$=1+1-2q$ (5)

$2a=2-2q \Rightarrow a=b=1-q$

(b) $f(-1)=-p+3+q-6=0 \longrightarrow (1)$ (5)

$f(-2)=-8p+12+2q-6=0 \longrightarrow (2)$ (5)

$(1)\times2-(2) \Rightarrow 6p-6-6=0$

$p=2,\ q=5$ (10)

$2x^3+3x^2-5x-6=(x+1)(x+2)(Ax+B)$

$A=2,\quad B=-3.$

∴ மற்றைய காரணி $(2x-3)$ (10)

$2x^3+3x^2-5x-6=(2x^2-x-1)\phi(x)+A_1x+B_1$ (5)

$=(2x+1)(x-1)\phi(x)+A_1x+B_1$

$x=1$ எனில் $-6=A_1+B_1$ (5) $\boxed{50}$

$x=-\frac{1}{2}$ எனில் $-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-\frac{5}{2}-6=-\frac{A_1}{2}+B_1$ (5)

$-3=-\frac{A_1}{2}+B_1$

$A_1=(-2),\ B_1=(-4)$ ∴ மீதி $(-2x-4)$ (5)

(12) (a)

(i) ${}^5C_2\times{}}^5C_2\times{}^5C_1=\frac{5!}{3!2!}\times\frac{5!}{3!2!}\times\frac{5!}{1!4!}$ (15)

$=500$ (5) $\boxed{20}$

(ii) ${}^5C_2\times{}^3C_2\times{}^1C_1=\frac{5!}{2!3!}\times\frac{3!}{2!1!}\times1$ (15)

$=30$ (5) $\boxed{20}$

(iii) குறிந்த இரு வைத்திய சாலையும் ஏனைய 3 வைத்திய சாலைகளில் ${}^3C_2\times{}^3C_1$ (10)

$=\frac{3!}{2!1!}\times\frac{3!}{2!1!}=9$ (5) $\boxed{15}$

(iv) $5!=120$ வழிகளில் அமர்த்தலாம். (10) $\boxed{10}$

(b) $V_r=Pr^2+Qr+R$

$V_{r-1}=P(r-1)^2+Q(r-1)+R$

$r(r+1)=V_r-3V_{r-1}$

$r(r+1)=(Pr^2+Qr+R)-3[P(r-1)^2+Q(r-1)+R]$ (5)

குணகங்களைச் சமப்படுத்தல்.

r^2 ..... $1=-2P$ (5)

r^1 ..... $1=6P-2Q$ (5)

r^0 ..... $0=3Q-2R-3P$ (5)

$P=-\frac{1}{2},\ Q=-2,\ R=-\frac{9}{4}$ (15) $\boxed{35}$

$U_r=\frac{r(r+1)}{3^r}$ (5)

$=\frac{V_r-3V_{r-1}}{3^r}$

$=\frac{V_r}{3^r}-\frac{V_{r-1}}{3^{r-1}}$ (5)

$U_r=f(r)-f(r-1)$ இங்கு $f(r)=\frac{V_r}{3^r}$ (5)

$U_r=f(r)-f(r-1)$

$r=1$ ... $U_1=f(1)-f(0)$ (5)

$r=2$ ... $U_2=f(2)-f(1)$

$r=3$ ... $U_3=f(3)-f(2)$

⋮

$r=n-1$ ... $U_{n-1}=f(n-1)-f(n-2)$ (5)

$r=n$ ... $U_n=f(n)-f(n-1)$

$\sum_{r=1}^{n}U_r=f(n)-f(0)$ (5) $\boxed{35}$

$=\frac{V_n}{3^n}-\frac{V_0}{3^0}$ (5)

$=\frac{(-\frac{1}{2}n^2-2n-\frac{9}{4})}{3^n}+\frac{9}{4}$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{9}{4} - \left(\frac{2n^2+8n+9}{4\cdot 3^n}\right)$$

$$\sum_{r=1}^{n} W_r = \left(\frac{9}{4} - \sum_{r=1}^{n} U_r\right) 4\cdot 3^n$$ என்பதை (5)

$$= 2n^2+8n+9$$ அகும்.

$$\sum_{r=1}^{\infty} W_r = \infty$$ என்பதை இந்தத்தொடர் (5)

ஒரு அகங்க தொடரல்ல (5)

15

---

(13) (a) $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ என்க.

$z_1 + z_2 = (x_1+x_2) + i(y_1+y_2)$ (5)

$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$ (5)

இவை மெய்யெண்களாகையால்

$y_1 + y_2 = 0 \longrightarrow (1)$

$x_1y_2 + x_2y_1 = 0 \longrightarrow (2)$

மற்று மெய்யெண் என்பதால் $x_1 + x_2 < 0 \rightarrow (3)$

(10) $x_1x_2 - y_1y_2 < 0 \rightarrow (4)$

$(1) \Rightarrow y_1 = -y_2$

$(2) \Rightarrow y_2(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow y_2 = 0$ or $x_1 = x_2$ (10)

$(4) \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 < 0$ இது பொருந்தாமையால்.

$\therefore y_2 = 0$ (5) (10) 50

$(1) \Rightarrow y_1 = 0$ என்பதை $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$ இவை (5) மெய்யெண்களாகும்.

(b) $|z_1| = |z_2| = |z_3| = p$ என்க.

$z_1 + z_2 + z_3 = 0$

$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 = 0$ (5)

$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$ (10)

$= z_1\cdot\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 - z_1\cdot\bar{z}_2 - z_2\cdot\bar{z}_1$ (5)

(5) $= |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1\bar{z}_2 + z_2\cdot\bar{z}_1)$

$= 2p^2 - (z_1\cdot\bar{z}_2 + z_2\cdot\bar{z}_1)$

$p^2 = |z_3|^2 = z_3\cdot\bar{z}_3$ (5)

$= (-z_1 - z_2)(-\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$

(5) $= |z_1|^2 + |z_2|^2 + (z_1\bar{z}_2 - z_2\cdot\bar{z}_1)$

$= 2p^2 + (z_1\cdot\bar{z}_2 + z_2\cdot\bar{z}_1)$

$-p^2 = z_1\cdot\bar{z}_2 + z_2\cdot\bar{z}_1$

$|z_1 - z_2|^2 = 3p^2$ (5)

இவ்வாறே $|z_2 - z_3|^2 = 3p^2$,

$|z_3 - z_1|^2 = 3p^2$ அகும்

என்பதை z_1, z_2, z_3 என்பன சமபக்க முக்கோணியின் உச்சிகளை (10) உணர்த்தும். 50

(c) $A = \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & -9 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36-18 & 54-4 \\ -12+10 & -18+2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ (10)

$A^2 + A - 12I = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 12\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (10)

$= 0$ (5)

$A^2 + A = 12I$

$A(A+I) = 12I$

$\frac{1}{12}A(A+I) = I$ (10)

என்பதை $\frac{1}{12}(A+I)$ தரும் A^{-1} அகும்.

$\frac{1}{12}\left[\begin{pmatrix} -6 & -9 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = A^{-1}$ (10)

$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -5 & -9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ அகும். (5) 50

---

(14) $f(x) = \dfrac{4(x^2-3x+1)}{(x-2)^3}$; $x \neq 2$

$f'(x) = \dfrac{(x-2)^3 4(2x-3) - 4(x^2-3x+1)3(x-2)^2}{(x-2)^6}$ (15)

$= \dfrac{4(x-2)^2[x^2-7x+6-3x^2+9x-3}{(x-2)^6}$ (5)

$= \dfrac{-4(x+1)(x-3)}{(x-2)^4}$ (5) ; $x \neq 2$ 2

நிலைக்குத்து அணுகோடு $x = 2$

திருப்பம் புள்ளியில் $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

(5) $x = -1$, $x = 3$.

	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 2$	$2 < x < 3$	$3 < x < \infty$
$f'(x)$	(−)	(+)	(+)	(−)
	(5)	(5)	(5)	(5)

$(-1, -20/27)$ இழிவுத் திருப்பம் (5)

$(3, 4)$ உயர்வுத் திருப்பம் (5)

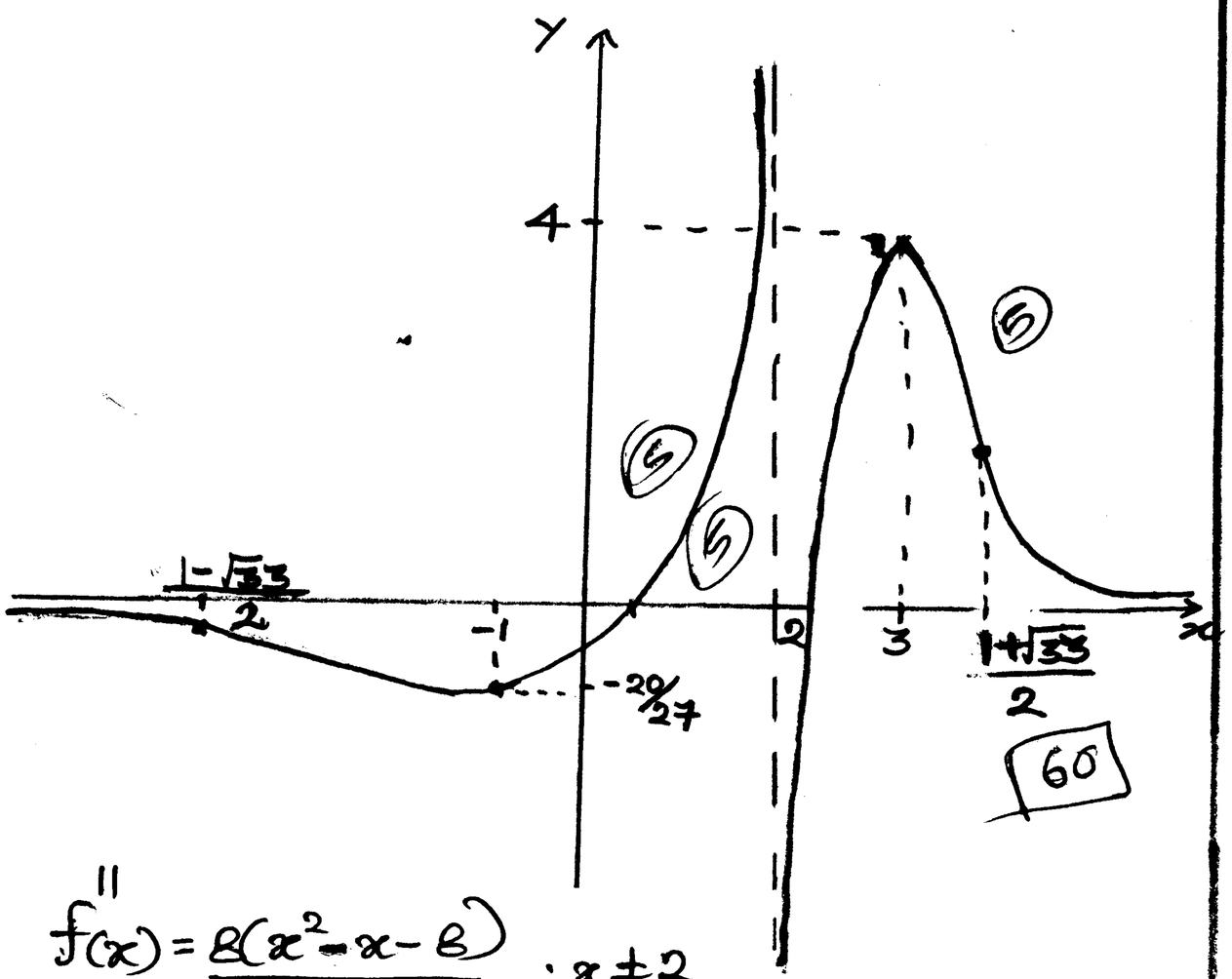
அச்சுக்களை வெட்டும் புள்ளிகள்

$(0, -\frac{1}{2})$ (5)

$(\frac{3-\sqrt{3}}{2}, 0)$ $(\frac{3+\sqrt{3}}{2}, 0)$

கிடை அணுகுகோடுகள் $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$

$y = 0$ (5)



60

$$f''(x) = \frac{8(x^2-x-8)}{(x-2)^5} \quad ; x \neq 2$$

$f''(x) = 0$ இல் வியந்தி பெறுமானம்

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{2}$$ (5)

$$x = \frac{1-\sqrt{33}}{2} \quad \text{or} \quad x = \frac{1+\sqrt{33}}{2}$$

	$-\infty < x < \frac{1-\sqrt{33}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{33}}{2} < x < 2$	$2 < x < \frac{1+\sqrt{33}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{33}}{2} < x < \infty$
$f''(x)$	(−)	(+)	(−)	(+)
	கீழ்நோக்கு வளைவு	மேல்நோக்கு வளைவு	கீழ்நோக்கு வளைவு	மேல்நோக்கு வளைவு

(10)

$x = \frac{1-\sqrt{33}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{33}}{2}$ அருகேயுள்ளதில் (5)

வியந்தி புள்ளிகள் காணப்படும் 20

(b) கனவளவு $V = 100\pi$

$$\pi r^2 h = 100\pi$$

(5) $$h = \frac{100}{r^2} \quad (r \neq 0)$$

மேற்பரப்பளவு S எனின் $S = \pi r^2 + \pi r h + 2rh$ (5)

$$S = \pi r^2 + \left(\frac{100\pi}{r}\right) + \left(\frac{200}{r}\right)$$

$$\frac{dS}{dr} = 2\pi r - \left(\frac{100\pi}{r^2}\right) - \left(\frac{200}{r^2}\right) \quad (5)$$

$$= 2\pi r - \frac{100(\pi+2)}{r^2} \quad (5)$$

$$= \frac{2\pi r^3 - 100(\pi+2)}{r^2} \quad (5)$$

$$\frac{dS}{dr} = 0$$

$$r^3 = \left(\frac{50(\pi+2)}{\pi}\right)$$

$$r = \left(\frac{50(\pi+2)}{\pi}\right)^{1/3}$$

$$0 < r < \left(\frac{50(\pi+2)}{\pi}\right)^{1/3} \quad ; \quad \frac{dS}{dr} < 0$$

$$r > \left(\frac{50(\pi+2)}{\pi}\right)^{1/3} \quad ; \quad \frac{dS}{dr} > 0$$ (10)

$\therefore r = \left[\frac{50(\pi+2)}{\pi}\right]^{1/3}$ இல் S இழிவு பெறுமானம். (5)

$$\frac{h}{2r} = \frac{100/r^2}{2r} = \frac{50}{r^3} = \left(\frac{\pi}{\pi+2}\right)$$ (5) 45

$$h : 2r = \pi : (\pi+2)$$

(15) (a) $$\int \frac{x^5+x}{x^4+x^2-2}\,dx$$

$x^2 = t$ எனல். $\Rightarrow 2x\,dx = dt$ (5)

$$\int \frac{(1+t^2)\,dt}{2(t^2+t-2)} \quad (5)$$

$$\frac{(1+t^2)}{(t+2)(t-1)} = A + \frac{B}{(t+2)} + \frac{C}{(t-1)}$$

இணாங்கணைச் சமப்படுத்தும்போது,

$A = 1$, $B = -5/3$, $C = 2/3$ (15)

$$= \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{5}{3(t+2)} + \frac{2}{3(t-1)}\right) dt \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2}\left(t - \frac{5}{3}\ln|t+2| + \frac{2}{3}\ln|t-1|\right) + c$$ (20)

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{5}{3}\ln|x^2+2| + \frac{2}{3}\ln|x^2-1|\right) + c$$

C – ஏகாந்தமாறிலி.

50

(b) (i) $$\int_0^a f(a-x)\,dx$$

$y = a - x$ எனல். $x = 0 \Rightarrow y = a$ (5)

$x = a \Rightarrow y = 0$

$dy = -dx$

$$\int_a^0 f(y)(-dy) = \int_0^a f(y)\,dy = \int_0^a f(x)\,dx$$

(5) (5) 15

(ii) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{x\sin 2x}{\sin^6 x + \cos^6 x}\,dx$

$= \int_0^{\pi/2} \frac{(\pi/2 - x)\sin 2(\pi/2 - x)}{\sin^6(\pi/2 - x) + \cos^6(\pi/2 - x)}\,dx$ (5)

$= \int_0^{\pi/2} \frac{(\pi/2 - x)\sin 2x}{\cos^6 x + \sin^6 x}\,dx$ (5)

$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\pi/2 \sin 2x}{(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^4 x - \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x)}\,dx$ (5)

$= \pi/4 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{(1 - 3\cos^2 x \sin^2 x)}\,dx$ (5) 5

$t = \sin^2 x$

$\frac{dt}{dx} = 2\sin x \cos x = \sin 2x$ (5)

$I = \pi/4 \int_0^1 \left(\frac{dt}{1 - 3t + 3t^2}\right)$ (5)

$= \pi/12 \int_0^1 \frac{dt}{1/3 - t + t^2}$ (5) $= \pi/12 \int_0^1 \frac{dt}{(t - 1/2)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2}$ (5)

$= \pi/12 \times 2\sqrt{3}\left[\tan^{-1} 2\sqrt{3}\left(t - \tfrac{1}{2}\right)\right]_0^1$ (5)

$= \pi/12 \times 2\sqrt{3}\left(\pi/3 + \pi/3\right)$

$= \frac{\sqrt{3}\,\pi^2}{9}$ (5) $\boxed{50}$

(c) $J = \int \frac{\ln x^x}{(f(x))^2}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int \ln x \times \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx$ (5)

$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\ln x}{1+x^2} - \int \frac{-1}{(1+x^2)} \cdot \frac{1}{x}\,dx\right]$ (5) (5)

$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\ln x}{1+x^2} + \int\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx\right]$ (5)

$= \frac{-\ln\sqrt{x}}{1+x^2} + \ln\sqrt{x} - \frac{1}{4}\ln|1+x^2| + c$ (10)

$= \ln\sqrt{x} - \frac{\ln\sqrt{x}}{1+x^2} - \frac{1}{4}\ln|1+x^2| + c$ (5)

$= \ln\sqrt{x} - \frac{\ln\sqrt{x}}{f(x)} - \frac{1}{4}\ln|f(x)| + c$ $\boxed{35}$

(16) $(1-t^2)(x-h) + 2t(y-k) = r(1+t^2)$

$(1-t^2)x + 2ty - h(1-t^2) - 2tk - r(1+t^2) = 0$

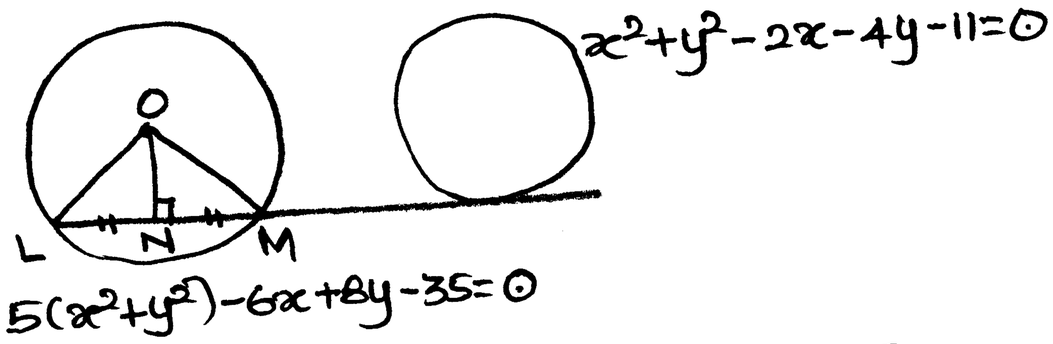
$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ என்ற வட்டத்தின் மையம் $\equiv (h, k)$, அரை $= r$ (5)

வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து அந்தக்கோடிற்கான செங்குத்து தூரம்

$H = \frac{|(1-t^2)h + 2tk - h(1-t^2) - 2tk - r(1+t^2)|}{\sqrt{(1-t^2)^2 + 4t^2}}$ (10)

$= \frac{|-r(1+t^2)|}{\sqrt{(1+t^2)^2}} = r$ (5)

எனவே தரப்பட்ட கோடானது வட்டத்தைத் தொடும்.



$ML = 4$ அலகு $\Rightarrow MN = 2$ அலகு

$O \equiv (3/5, -4/5)$ (5)

அரை $OM = \sqrt{9/25 + 16/25 + 7} = 2\sqrt{2}$

$ON^2 = OM^2 - MN^2 = 8 - 4$

$ON = 2$ அலகு

$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$ ஐ சுருக்குவதால்

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4^2$

$h = 1, \quad k = 2, \quad r = 4$

இவ் வட்டத்தைத் தொடும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$(1-t^2)(x-1) + 2t(y-2) = 4(1+t^2)$

எனவே எல்லாம் , $t \in \mathbb{R}$

$(1-t^2)x + 2ty - (3t^2 + 4t + 5) = 0$

$ON = 2 = \frac{|(1-t^2)\cdot 3/5 + 2t\cdot(-4/5) - (3t^2+4t+5)|}{(1+t^2)}$

$|3 - 3t^2 - 8t - 5(3t^2 + 4t + 5)| = 10(1+t^2)$

$|-18t^2 - 28t - 22| = 10(1+t^2)$

$|9t^2 + 14t + 11| = 5(1+t^2)$

(+) ; $2t^2+7t+3=0$

$(2t+1)(t+3)=0$

$t=-3$ or $t=-\frac{1}{2}$

(−) ; $7t^2+7t+8=0$

இங்கு மெய்த்தீர்வு இல்லை.

∴ அவ்வட்டத்தை இரு நாண்கள் தொடுகின்றன.

$t=-3 \Rightarrow -8x-6y-(5+27-12)=0$

$4x+3y-10=0$

$t=-\frac{1}{2} \Rightarrow 3x-4y-15=0$

---

(17) (a) $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

$\cos 2\theta=\cos\theta\cos\theta-\sin\theta\sin\theta$

$=\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)$

$=2\cos^2\theta-1$

$\cos 2\theta-\cos 4\theta=2\cos^2\theta-1-(2\cos^2 2\theta-1)$

$=2(\cos^2\theta-\cos^2 2\theta)$

$\theta=\pi/5$ எனப் பிரதியிடக்கூடிய

$\cos 2\pi/5-\cos 4\pi/5=2(\cos^2\pi/5-\cos^2 2\pi/5)$

$=2(\cos\pi/5-\cos 2\pi/5)\cdot(\cos\pi/5+\cos 2\pi/5)$

$(\cos 2\pi/5+\cos\pi/5)=2(\cos\pi/5-\cos 2\pi/5)(\cos\pi/5+\cos 2\pi/5)$

$\therefore (\cos\pi/5-\cos 2\pi/5)=\frac{1}{2}$.

$\cos\pi/5-2\cos^2\pi/5+1=\frac{1}{2}$

$4\cos^2\pi/5-2\cos\pi/5-1=0$

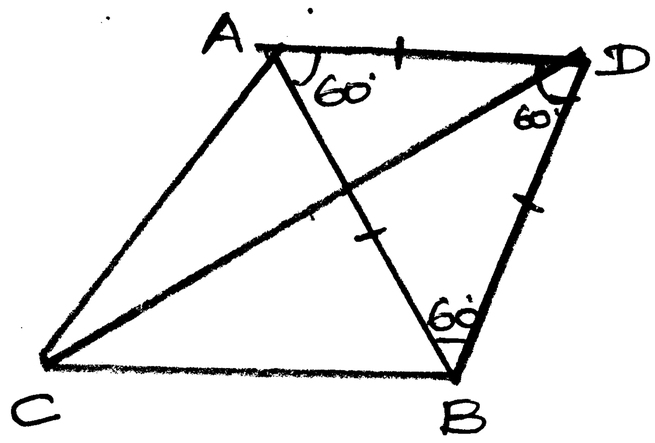
$\cos\pi/5=\dfrac{2\pm\sqrt{4-4\times4\times(-1)}}{2\times4}$

$=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$

$\cos\pi/5=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ அதேநேரம் $0<\pi/5<\pi/2$.

(b) $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$



Δ ACD இல்

$CD^2=AC^2+AD^2-2\cdot AC\cdot AD\cos(60+A)$

$=b^2+c^2-2bc[\cos 60\cos A-\sin 60\sin A]$

$=b^2+c^2-2bc(\frac{1}{2}\cos A-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A)$

$=b^2+c^2-bc\cos A+\sqrt{3}bc\sin A$

$=b^2+c^2-bc\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)+\sqrt{3}bc\sin A$

$=\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)+2\sqrt{3}\,\frac{1}{2}\cdot bc\sin A$

$=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+2\sqrt{3}\,\Delta$

(c) $\sin^{-1}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)+2\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)=\pi/2$

$\sin^{-1}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\alpha$, $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)=\beta$ எனல்

$-\pi/2\le\alpha\le\pi/2$, $-\pi/2\le\beta\le\pi/2$.

$\Leftrightarrow \sin\alpha=\dfrac{x}{x-1}$, $\tan\beta=\dfrac{1}{x+1}$

$\alpha+2\beta=\pi/2$

$\alpha=\pi/2-2\beta$

$\sin\alpha=\cos 2\beta=\dfrac{1-\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta}$

$\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1-\frac{1}{(x+1)^2}}{1+\left(\frac{1}{x+1}\right)^2}$ $x\neq 1,-1$.

$\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{x^2+2x}{x^2+2x+2}$

$x(x^2+2x+2)=(x-1)(x^2+2x)$

$x[\cancel{x^2}+2x+2-\cancel{x^2}-x+2]=0$

$x(x+4)=0$

$x=0$ or $x=-4$ இத்தீர்வு பொருந்தாது.

$\therefore x=0$ தீர்வாகும்.