

மாகாணக் கல்வித் திணைக்களம் வடமாகாணம்

இணைந்த கணிதம் I

10 T I

தரம்:13(2020)

பயிற்சிப் பரீட்சை - 01

மூன்று மணி 10 நிமிடங்கள்

சுட்டெண்

அறிவுறுத்தல்கள்:

- பகுதி A இன் எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்கும் விடைகளைத் தரப்பட்ட இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிகத் தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.
- பகுதி B இல் உள்ள 7 வினாக்களில் விரும்பிய 5 வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.
- ஒதுக்கப்பட்ட நேரம் முடிவடைந்ததும் பகுதி A ஆனது பகுதி B யிற்கு மேலே இருக்கக்கூடியதாக இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.

(10) இணைந்த கணிதம் I

பகுதி	வினா எண்	கிடைத்த புள்ளிகள்
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
மொத்தம்		

இணைந்தகணிதம் I

இணைந்தகணிதம் II

இறுதிப் புள்ளிகள்

பகுதி B

11. (a) p, q ஆகியன மெய்யெண்களாக உள்ள இருபடிச் சமன்பாடு $x^2 + px + q = 0$ இன் மூலங்கள் α, β எனக் கொள்வோம். $a = \alpha + \beta^2, b = \beta + \alpha^2$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டை p, q இன் சார்பில் காண்க. α, β ஆகியன மெய்யானவையாக இல்லாதபோது $p = -1$ ஆக இருந்தால் - இருந்தால் மாத்திரம் a, b ஆகியன மெய்யெனவும் இச்சந்தர்ப்பத்தில் $a = b = 1 - q$ எனவும் காட்டுக.
- (b) p, q ஆகியன இரு பூச்சியமற்ற மெய்யெண்கள் எனவும் $f(x) = px^3 + 3x^2 - qx - 6$ எனவும் கொள்வோம். $(x + 1), (x + 2)$ என்பன $f(x)$ இன் காரணிகள் எனின் p, q இன் பெறுமானத்தைக் கண்டு மூன்றாம் காரணியையும் காண்க. $f(x)$ ஐ $2x^2 - x - 1$ இனால் வகுக்கும்போது மீதி யாது?
12. (a) covide-19 ஆய்விற்காக 5 பிரதான வைத்தியசாலைகள் பங்கேற்கின்றன. ஒவ்வொரு வைத்தியசாலையும் ஒரு ஆண் வைத்திய நிபுணர், ஒரு பெண் வைத்திய நிபுணர், ஒரு தொழில்நுட்ப உதவியாளர் ஆகியோரால் பிரதிநிதித்துவப்படுத்தப்படுகின்றது. இவர்களில் 5 உறுப்பினர்களைக் கொண்ட ஒரு குழுவைத் தெரிந்தெடுக்க வேண்டியுள்ளது. பின்வரும் ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பங்களிலும் ஆக்கப்படத்தக்க வெவ்வேறு வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
- (i) குழுவில் 2 ஆண் வைத்திய நிபுணர்கள் 2 பெண் வைத்திய நிபுணர்கள், 1 தொழில்நுட்ப உதவியாளர் இடம்பெற வேண்டும்.
- (ii) 5 வைத்தியசாலைகளையும் பிரதிநிதித்துவப்படுத்தக்கூடியதாகவும் 2 ஆண் வைத்திய நிபுணர்கள், 2 பெண் வைத்திய நிபுணர்கள், 1 தொழில்நுட்ப உதவியாளர் இடம்பெற வேண்டும்.
- (iii) குறித்த இரு வைத்தியசாலையின் ஆண் வைத்திய நிபுணர்கள் இருவரும் பங்குபற்றத்தக்கதாகவும் ஏனைய வைத்தியசாலைகளிலிருந்து 2 பெண் வைத்திய நிபுணர்களும் ஒரு தொழில்நுட்ப உதவியாளரும் இடம்பெறும் குழுக்கள்
- (iv) தெரிவு செய்யப்பட்ட ஒரு குழுவானது தொற்று நீக்கும் செயன்முறைக்காகச் சுரங்கப் பாதையினூடு அனுப்ப வேண்டியுள்ளது. அனுப்பப்படத்தக்க விதங்களின் எண்ணிக்கை யாது?

(b) $V_r = Pr^2 + Qr + R$ எனக் கொள்வோம். இங்கு P, Q, R என்பன மெய் மாறிலிகள், எல்லா $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் $r(r+1) = V_r - 3V_{r-1}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக P, Q, R என்பவற்றைக் காண்க.

$\frac{1.2}{3^1} + \frac{2.3}{3^2} + \frac{3.4}{3^3} + \frac{4.5}{3^4} + \dots$ என்னும் தொடரின் r ஆவது

உறுப்பு U_r ஐ எழுதுக $U_r = f(r) - f(r-1)$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக $f(r)$ ஐக்

காண்க. இதிலிருந்து, $\sum_{r=1}^n U_r = \frac{9}{4} - \frac{(2n^2+8n+9)}{4 \cdot 3^n}$ எனக் காட்டுக

$\sum_{r=1}^n W_r = \left(\frac{9}{4} - \sum_{r=1}^n U_r\right) 4 \cdot 3^n$ எனின் $\sum_{r=1}^{\infty} W_r$ ஒருங்கு தொடரா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

13. (a) $Z_1 + Z_2, Z_1 Z_2$ ஆகிய ஒவ்வொன்றும் மறை மெய்யெண்களாக இருக்குமாறு Z_1, Z_2 என்பன இரு சிக்கல் எண்கள் எனின், Z_1, Z_2 மெய்யெண்கள் எனக் காட்டுக.

(b) $|Z_1| = |Z_2| = |Z_3|$ ஆகவும் $Z_1 + Z_2 + Z_3 = 0$ ஆகவும் இருக்குமாறு Z_1, Z_2, Z_3 பூச்சியமற்ற மூன்று சிக்கல் எண்கள் ஆகும். ஆகண் வரிப்படம் ஒன்றில் சமபக்க முக்கோணி ஒன்றின் உச்சிகளை இச்சிக்கல் எண்கள் வகை குறிக்கின்றன எனக் காட்டுக.

(c) $A = \begin{bmatrix} -6 & -9 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ எனின், $A^2 + A - 12I = \mathbf{0}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, A^{-1} ஐக் காண்க.

14. (a) $x \neq 2$ இற்கு $f(x) \equiv \frac{4(x^2-3x+1)}{(x-2)^3}$ ஆகும்.

$x \neq 2$ இற்கு $f'(x) \equiv -\frac{4(x+1)(x-3)}{(x-2)^4}$ எனத் தரப்பட்டுகின்றதெனக் காட்டுக.

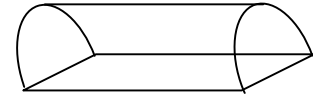
திரும்பற் புள்ளிகளையும் அணுகுகோடுகளையும் காட்டி $y = f(x)$ இற்கான வரைபைப் பரும்படியாக வரைக.

$x \neq 2$ இற்கு $f''(x) \equiv \frac{8(x^2-x-8)}{(x-2)^5}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது $y = f(x)$ இற்கான

விபத்திப் புள்ளிகளின் x ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

(b) ஆரை r ஐயும் நீளம் h ஐயும் கனவளவு 100π

ஐயும் உடைய திண்ம செவ்வட்ட உருளையொன்று உருவில் காணப்படுகின்றவாறு பாதியாக



வெட்டப்பட்டுள்ளது. பாதி உருளையின் மொத்த மேற்பரப்பளவு S எனின்

$S = \pi r^2 + \frac{100\pi}{r} + \frac{200}{r}$ எனக் காட்டுக.

S இழிவாக இருப்பதற்கு உருளையின் நீளத்திற்கும் அரைவட்ட முகத்தின் விட்டத்திற்கும் இடையிலான விகிதம் $\pi : (\pi + 2)$ எனக் காட்டுக.

15 (a) பொருத்தமான பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்திய பின்னர் பகுதிப் பின்னங்களைக் கண்டு

$$\int \frac{x^5+x}{x^4+x^2-2} dx \text{ ஐக் காண்க.}$$

(b) $f(x)$ என்பது $[0, a]$ எனும் ஆயிடையினுள் தொகையிடத்தக்க சார்பு எனின்

$$\int_0^a f(a-x)dx = \int_0^a f(x)dx \text{ எனக் காட்டுக. இங்கு } a \text{ ஒரு மெய்ம் மாறிலியாகும்.}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin 2x}{\sin^6 x + \cos^6 x} dx = \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1-3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx \text{ எனக் காட்டுக.}$$

$$\text{அத்துடன் } I = \frac{\sqrt{3}\pi^2}{9} \text{ எனவும் காட்டுக.}$$

(c) $J = \int \frac{\ln x^x}{(f(x))^2} dx$ எனவும் $f(x) = x^2 + 1$ எனவும் கொள்வோம். பகுதிகளாகத்

$$\text{தொகையிடுவதன் மூலம் ஆரம்பித்து } J = \ln \sqrt{x} - \frac{\ln \sqrt{x}}{f(x)} - \frac{1}{4} \ln f(x) + C \text{ எனக்}$$

காட்டுக. இங்கு C யானது எதேச்சை மாறிலியாகும்.

16. வெளிப்புள்ளி (x_0, y_0) இருந்து நேர்கோடு $ax + by + c = 0$ இற்கு வரையப்பட்ட

$$\text{செங்குத்துத் தூரம் } \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

t இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $(1-t^2)(x-h) + 2t(y-k) = r(1+t^2)$

என்னும் கோடு $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ என்னும் வட்டத்தைத் தொடும் என நிறுவுக.

$5(x^2 + y^2) - 6x + 8y - 35 = 0$ என்னும் வட்டத்தின் நான்கு அலகு நீளமுடைய இரு

நாண்கள் $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$ என்னும் வட்டத்தைத் தொடும்படியாக

வரையலாம் எனக் காட்டி அதன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

17. (a) $\cos(A+B)$ ஐ $\sin A, \cos A, \sin B, \cos B$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எழுதி

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 \text{ ஐ உய்த்தறிக.}$$

$$\cos 2\theta - \cos 4\theta = 2(\cos^2 \theta - \cos^2 2\theta) \text{ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து, } \theta \text{ இற்கு}$$

$$\text{தகுந்த பெறுமானத்தை இடுவதன் மூலம் } \cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2} \text{ எனக் காட்டி}$$

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \text{ என்பதை உய்த்தறிக.}$$

(b) வழமையான குறியீடுகளில் முக்கோணிக்கான கோசைன் நெறியைக் கூறுக.

முக்கோணி ABC இற்கு வெளியே புள்ளி D காணப்படுகின்றது. ABD சமபக்க

$$\text{முக்கோணி எனின் } CD^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{3} \Delta \text{ எனக் காட்டுக.}$$

(இங்கு Δ என்பது முக்கோணி ABC இன் பரப்பளவு ஆகும்.)

$$(c) \text{ சமன்பாடு } \sin^{-1}\left(\frac{x}{x-1}\right) + 2 \tan^{-1}\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ ஐத் தீர்க்க.}$$